数理解析研究所講究録
1195巻 2001年 154-164

松永良弼の綴術について*

小川束 (四日市大学)†

1 はじめに

松永良弼 (?–1744) の『算法綴術草』は関算前伝に含まれているものであり，すでに林 ([5]) によってその内容が理解され，日本学士院編『明治前日本数学史』([4]) 以降，その評価は確定している観がある．少なくとも『明治前日本数学史』以後,『算法綴術草』は通常 $(1-x)^{-1}$ の級数展開と $(1-x)^{1/2}$ の級数展開を述べたものとして紹介されている．松永の著作のうち 35 編を収めた全集 ([6]) もそのように解説している．

『算法綴術草』は，第一章「帰除」，第二章「開平法」，第三章「勾股求弦」の三章からなる．このうち第一章「帰除」が $(1-x)^{-1}$ の展開式の応用とみなされている部分である．しかし，そのような解釈には疑義をはさまざるを得ない．それは今日のわれわれの立場からの解釈であって，到底受け入れることのできないものもある．第一章の本質はそのようなものではなく，むしろ除法の近似計算アルゴリズムを確立したものとみるべきものである．

第二章「開平法」は $(1-x)^{1/2}$ の級数展開を述べたものとされている．このこと自身は正しいが，それを得る方法についての考察は十分でない．本論では，その点について若干の考察を加え，建部賢弘が『円理綴術』において詳細に述べた，組み立て除法による変数変換による方法がそれであることを確認する．これは通説となっているが，それを明確に述べたものはない．一方，$(1-x)^{1/2}$ の級数展開が実質的に建部によって得られていたとされる点は，明確な根拠がない．これは今後の問題として残っている．

なお，第三章「勾股求弦」は問題が外見上異なるばかりで，内容は第二章と同じである．

2 帰除における級数展開の解釈

帰除にはつぎの四問が実例として取り上げられている．

1. 今，銀が 48 匁ある．これを 13 人に分けると，一人当たりどのくらい得るか.
2. 今，銀が 1 貫 850 目ある．これで白ジュツ 497 斤を買うと，一斤当たりいくらになるか.
3. 今，銀が 320 目ある．これを古銀に替えると，いくらになるか.
4. 今，銀が 1 貫 850 目ある．これで醇酎 5 石 2 斗 3 升を買うと，一升当たりいくらになるか.

*On the *Tetsujutsu* due to MATSUNAGA Yoshisuke

†OGAWA Tsukane, Yokkaichi University, ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

ここでは第一問について考察する．第一問の「答」は，3匁6分923微強 となっている．もちろん，単純な割り算によって答が求まるのであるが，「術」には，

$$\begin{aligned}
&a = 48\,\text{匁} \times 7 \times 10^{-2} = 3\,\text{匁}\,36\ (\text{元数という}),\\
&\delta_1 = a \times 9 \times 10^{-2} = 0\,\text{匁}\,3024\ (\text{一差という}),\\
&\delta_2 = \delta_1 \times 9 \times 10^{-2} = 0\,\text{匁}\,027216\ (\text{二差という}),\\
&\delta_3 = \delta_2 \times 9 \times 10^{-2} = 0\,\text{匁}\,00244944\ (\text{三差という}),\\
&\delta_4 = \delta_3 \times 9 \times 10^{-2} = 0\,\text{匁}\,0002204496\ (\text{四差という}),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

を順次計算し，これらを加えた

$$a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \cdots$$

が答である，と述べられている．

この計算の原理は，次の「解」を見れば明らかである．すなわち，

$$\frac{1}{13} = 0.07 + \frac{0.09}{13} \quad (0.07\ \text{を元法},\ 0.\,09\ \text{を差法という})$$

であるから，$\delta_0 = a(= 48 \times 0.07)$，$\delta_n = \delta_{n-1} \times 0.09\ (n \geq 1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
48 \times \frac{1}{13} &= a + 48 \times \frac{1}{13} \times 0.09\\
&= a + \delta_1 + 48 \times \frac{1}{13} \times 0.09^2\\
&= a + \delta_1 + \delta_2 + 48 \times \frac{1}{13} \times 0.09^3\\
&= \cdots
\end{aligned}$$

と続けることができる．

さて，本文に記載された値は δ_4 までであるが，ここまでの和は $3.69228\cdots$ であり，3匁6分923微強 とはならない (微強とは 0 を切り捨てたことを示す用語である)．ところが，$\delta_5 = 0.000019840464$ であるから，δ_5 までを加えれば，$3.6923048\cdots$ となり，「答」に良く合う．一方，$\delta_6 = 0.00000178564176$ で，これを δ_5 までの和に加えると，小数第 6 位は 6 となり，δ_7 以降は 10^{-6} 未満であるから，δ_6 以下の項は「答」の微強部分に影響しないことがわかる．

このことから，本文には δ_4 までの値が記載されているが，少なくとも δ_5 までは計算したことがわかる．いずれにせよ，このように，十分大きな n に対して第 n 差までを計算しておけば，任意の精度で答を求めることができる．

この帰除について『明治前日本数学史』([4]) は次のように述べている[1]．

$$\begin{aligned}
\frac{48}{13} &= 48 \times \frac{7}{91} = 48 \times \frac{7}{100-9} = 48 \times \frac{7}{100}\left(1 - \frac{9}{100}\right)^{-1}\\
&= \frac{48 \times 7}{100}\left(1 + \frac{9}{100} + \left(\frac{9}{100}\right)^2 + \left(\frac{9}{100}\right)^3 + \cdots\right).
\end{aligned}$$

[1] 541 ページ．

すなわち，計算の本質は $\left(1-\dfrac{9}{100}\right)^{-1}$ の展開であって，本問はその適用を実問について説いたものであるとしている[2].

しかしこれは正しくない．帰除における計算の本質は，その近似計算のアルゴリズム化にあるのであって，$(1-x)^{-1}$ の展開公式の応用にあるのではない．ここでいうアルゴリズム化とは，そろばんによる計算に都合の良い方法を見出すことである．すなわち，本問の場合，そろばん上では次のような計算が実行される．

(1) 元法 $\delta_0 = a = 48 \times 0.07 = 3.36$ と差法 0.09 をそろばん上に置く．

5			5							5								
4	3	3	1					3	3	1								

(2) $\delta_1 = \delta_0 \times 0.09 = 0.3024$ を計算する．

5										5								
4	3	0	2	4				3	3	1								

(3) $\delta_1 = 0.3024$ を右に加える．

5									5	5								
4	3	0	2	4				3	1	1	2	4						

(4) $\delta_2 = \delta_1 \times 0.09 = 0.027216$ を計算する．

5		5			5				5	5								
4	2	2	2	1	1			3	1	1	2	4						

(5) $\delta_2 = 0.027216$ を右に加える．

5		5			5				5	5	5	5		5				
4	2	2	2	1	1			3	1	3	4	1	1	1				

(6) $\delta_3 = \delta_2 \times 0.09 = 0.00244944$ を計算する．

5				5					5	5	5	5		5				
4	2	4	4	4	4	4		3	1	3	4	1	1	1				

(7) $\delta_3 = 0.00244944$ を右に加える．

5				5					5	5			5	5				
4	2	4	4	4	4	4		3	1	4	2	0	1		4	4		

(8) $\delta_4 = \delta_3 \times 0.09 = 0.0002204496$ を計算する．

5						5	5		5	5			5	5				
4	2	2	0	4	4	4	1	3	1	4	2	0	1		4	4		

(9) $\delta_4 = 0.0002204496$ を右に加える．

5						5	5		5	5			5	5	5	5	5	5
4	2	2	0	4	4	4	1	3	1	4	2	2	3		3	3	4	1

[2]同書 540 ページ.

このような計算が可能なのは，無限級数の一般項が $\delta_n = \delta_{n-1} \times 0.09$ という形になっているからである．上のそろばんの図では，中央に第 n 項が，右に第 n 項までの部分和が置かれている．(2)–(3)，(4)–(5)，(6)–(7)，(8)–(9) が一組になって，それぞれ中央を 0.09 倍して，それを右に加える操作を示している．標準的なアルゴリズム記号で書けば次のようになる．

```
term := 3.36; sum := term; rate := 0.09; n := 5;
for i:=1 to n
   begin
      term := term * 0.09;
      sum := sum + term;
   end;
```

このような型の無限級数は日本数学史において典型的なもので，たとえば円周率の展開についてみれば，以下のようなものがある．

(1) 蜂谷定章『円理発起』(1728 年) における

$$\pi^2 = 8\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1\cdot 4}{6\cdot 15} + \frac{1\cdot 4\cdot 9}{6\cdot 15\cdot 28} + \cdots\right)$$

(2) 松永良弼『方円算経』(1739 年) における

$$\begin{aligned}\pi^2 &= 9\left(1 + \frac{1^2}{3\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots\right),\\ \pi &= 3\left(1 + \frac{1^2}{4\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 3^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} + \cdots\right).\end{aligned}$$

(3) 坂部広胖『算法点竄指南録』(1810 年) における

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1\times 4}{5\cdot 7\cdot 9} - \frac{1\cdot 3\times 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\times 4\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17} - \cdots\right).$$

(4) 川井久徳『新弧円解』(1823 年) における

$$\begin{aligned}\pi &= 2\left(1 + \frac{1^2}{3!} + \frac{3^2}{5!} + \frac{3^2\cdot 5^2}{7!} + \frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{9!} + \cdots\right),\\ \frac{\pi}{4} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{2\times 3\cdot 5} + \frac{2\cdot 3}{2\times 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\times 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \cdots.\end{aligned}$$

(5) 長谷川寛閲，千葉胤秀編『算法新書』(1830 年) における

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6\times 5} - \frac{1\cdot 2}{6\times 5\cdot 7} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6\times 5\cdot 7\cdot 9} - \cdots.$$

もちろん，このような型でない展開も数多く得られているが，一般項をこのような型に整えるのは，計算上の実用性を意識したものである．

『明治前日本数学史』における上述のような変形解釈は,『大成算経』巻二の帰除の益除の解釈に連なるものである.『大成算経』には，96 で割るとき，$100 - 96 = 4$ を虧法と名

づけて，被除数の首位よりこの斷法 4 を乗じて次位へ加えてゆき，末位へ到れば，再び首位へ戻り，同様の計算を繰り返す，とある．これを『明治前日本数学史』は

$$\frac{a}{96}=\frac{a}{100-96}=\frac{a}{100}\left(a+\frac{4}{100}+\left(\frac{4}{100}\right)^2+\cdots\right)$$

と解釈したのである．しかし，この部分も，

$$\frac{1}{96}=0.01+\frac{0.04}{96}$$

であるから，$\delta_0=a\times 0.01$ として，

$$\begin{aligned}\frac{a}{96} &= \delta_0+a\times 0.04\times\frac{1}{96}\\ &= \delta_0+\delta_0\times 0.04+\delta_0\times 0.04^2\times\frac{1}{96}\\ &= \delta_0+\delta_0\times 0.04+\delta_0\times 0.04^2+\delta_0\times 0.04^3\times\frac{1}{96}\\ &= \cdots\end{aligned}$$

と考えることができる．むしろこのように考えるほうが妥当である．

3 開平方および勾股求弦における一般二項定理

開平方においては，次の三問が解かれている．

1. 面積 50000 歩の [正方形の] 田がある．この田の一辺はいくらか．
2. 面積 30000 歩 [の土地が] がある．これを正方形の田に変えると，一辺はいくらか．
3. 面積 3000 歩 [の土地が] がある．これを正方形の田に変えると，一辺はいくらか．

また，勾股求弦においては，つぎの一問が解かれている．

1. 直角三角形において勾 7 寸，股 9 寸のとき，弦はいくらか

勾股求弦の問題に対する解は，開平方の第三問の解とまったく同様であるから，ここでは省く．また，開平方の第三問にだけ，第一，第二問と同様の解のほかに，別解が述べられているので，ここではこの第三問を取り上げる．

問題は $\sqrt{3000}$ の計算である．二種類いずれの計算においても，まず $\sqrt{3000}$ の概算値を求める．$54^2=2916<3000<55^2=3025$ であるから，それは 54 である．これを「元数」と呼ぶ．また $3000-54^2=84$ を「余積」と呼ぶ．

第一の計算では，$a=45$，$b=84$ として，

$$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{ab}{2a^2}-\frac{ab}{2a^2}\cdot\frac{1\cdot b}{4a^2}+\frac{ab}{2a^2}\cdot\frac{1\cdot b}{4a^2}\cdot\frac{3b}{6a^2}-\cdots$$

を計算する．

また，第二の計算では，

$$a_0 = a, \quad a_1 = 2{a_0}^2 + b, \quad a_2 = 2{a_1}^2 - b^2, \quad a_3 = 2{a_2}^2 - b^4, \quad a_4 = 2{a_3}^2 - b^8, \cdots$$

とし，

$$\Delta_1 = \frac{b}{2a_0}, \quad \Delta_2 = \frac{\Delta_1 b}{2a_1}, \quad \Delta_3 = \frac{\Delta_2 b^2}{2a_2}, \quad \Delta_4 = \frac{\Delta_3 b^4}{2a_3}, \quad \Delta_5 = \frac{\Delta_4 b^8}{2a_4}, \cdots$$

とおくとき，

$$\sqrt{a^2+b} = a + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 - \Delta_5 - \cdots$$

を計算する．

第一の計算は

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{a}{2}\left(\frac{b}{a^2}\right) - \frac{1\cdot a}{2\cdot 4}\left(\frac{b}{a^2}\right)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot a}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{b}{a^2}\right)^3 - \cdots$$

となり，これは一般二項定理に他ならない．すなわち，

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+b} &= a\left(1+\frac{b}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{b}{a^2}\right)^n \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{b}{a^2}\right)^n \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-2)(1-4)\cdots(1-2(n+1))}{2^n\cdot n!}\left(\frac{b}{a^2}\right)^n \\
&= a\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\left(\frac{b}{a^2}\right)^n\right\} \\
&= a\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{b}{a^2}\right)^n\right\}
\end{aligned}$$

(ただし $0!! = (-1)!! = 1$) である．

しかし，これは計算結果が二項定理であるというのに過ぎず，松永がこのように計算したというわけではない．松永がどのようにこの結果を得たのか，という点に関しては，それを直接明確に示す資料はなく，『明治前』([4]) や『松永良弼』([6]) においても，一般二項定理であることが指摘されているのみである．

寛政6年 (17993年) に石黒信由によって写され，後に文化14年に五十嵐厚義によってさらに写された『綴術』前巻[3]は，次のような構成となっている．

[3]東北大，狩 7.20522．なお，後巻は冒頭に「石黒信由著述」とあり，末尾に文化3年に「書之」とある．内容的に『算法綴術草』とは関係がない．これら二巻は別の系統のものを，一組にまとめた可能性もある．

1. 帰徐得商　開平 $\sqrt{50000}$ の展開 (1 オ–6 オ)
2. 帰徐得商　開平 $\sqrt{30000}$ の展開 (7 オ–12 ウ)
3. 帰徐得商　勾股弦 $\sqrt{3^2+4^2}$ の展開 (13 オ–17 ウ)
4. 帰徐得商　勾股弦 $\sqrt{5^2-3^2}$ の展開 (18 オ–34 ウ)
5. 円内に二長方形を入れる問題.

これらのうち，最初の二つは『算法綴術草』と同じ問題である．勾股弦に関する第 3，4 問は,『算法綴術草』が扱っている $\sqrt{7^2+9^2}$ とは数値が異なっているが，類似している．これらは直角三角形 $(3,4,5)$ から二問を発生させたもので,『算法綴術草』よりも若干意識的である．第 5 問に相当する問題は『算法綴術草』にはない．

また，千葉胤秀の『算法新書』(1830 年，文政 13 年) 巻之四「綴術」の中に $\sqrt{n}$ の (開方によらない) 展開法が述べられている[4]．

『綴術』と『算法新書』における展開計算は同じであり，松永の展開法に連なるものである可能性がある．さらに多くの資料を猟補する必要があるが，現時点ではこれらにおける展開法を松永の展開法であると考えておくのが妥当である．両書共，詳細な変形を記述しているが，より詳細な『算法新書』から，その展開法をまとめておく．

まず，$\sqrt{n}$ を概算して a とし，$\sqrt{n}-a=x$ とする．このとき $n=x^2+2ax+a^2$，すなわち $x^2+2ax+(a^2-n)=0$ である．$t=a^2-n$ とおく．t は上の余積の符号を変えたものである．さて，商として $-\dfrac{t}{2a}$ を立てて，組み立て除法により変数を変換する (図 1).

$$
\begin{array}{r|lll}
-\dfrac{t}{2a} & 1 & 2a & t \\
 & & -\dfrac{t}{2a} & -t+\dfrac{t^2}{2^2a^2} \\
\hline
 & 1 & 2a-\dfrac{t}{2a} & \dfrac{t^2}{2^2a^2} \\
 & & -\dfrac{t}{2a} & \\
\hline
 & 1 & 2a-\dfrac{t}{a} & \dfrac{t^2}{2^2a^2}
\end{array}
$$

図 1: 組み立て除法による変数変換 (その 1)

以下同様に，定数項のうち t の次数の最小の項を $2a$ で割り，その符号を変えたものを商として，変数を変換してゆく (図 2).

こうして，

$$\sqrt{n}=a-\frac{t}{2a}-\frac{t^2}{2^3a^3}-\frac{t^3}{2^4a^5}-\frac{5t^4}{2^7a^7}-\frac{7t^5}{2^8a^9}-\cdots$$

が得られる．これは確かに第一の展開式に等しい．

『算法新書』は，ここで次のように変形している．

$$\frac{t}{a^2}=\frac{a^2-n}{a^2}=1-\frac{n}{a^2}=r \quad \text{(因法という)}$$

[4]東北大，林 260．巻之四 138 ウ–162 オが「綴術」で，$\sqrt{n}$ の展開法は 139 オ–140 ウ．

$$
\begin{array}{r|llll}
-\dfrac{t^2}{2^3a^3} & 1 & 2a-\dfrac{t}{a} & & \dfrac{t^2}{2^2a^2} \\
 & & -\dfrac{t^2}{2^3a^3} & & -\dfrac{t^2}{2^2a^2}+\dfrac{t^3}{2^3a^4}+\dfrac{t^4}{2^6a^6} \\
\hline
 & 1 & 2a-\dfrac{t}{a}-\dfrac{t^2}{2^3a^3} & & \dfrac{t^3}{2^3a^4}+\dfrac{t^4}{2^6a^6} \\
 & & -\dfrac{t^2}{2^3a^3} & & \\
\hline
-\dfrac{t^3}{2^4a^5} & 1 & 2a-\dfrac{t}{a}-\dfrac{t^2}{2^2a^3} & & \dfrac{t^3}{2^3a^4}+\dfrac{t^4}{2^6a^6} \\
 & & & -\dfrac{t^3}{2^4a^5} & -\dfrac{t^3}{2^3a^4}+\dfrac{t^4}{2^4a^6}+\dfrac{t^5}{2^6a^8}+\dfrac{t^6}{2^8a^{10}} \\
\hline
 & 1 & 2a-\dfrac{t}{a}-\dfrac{t^2}{2^2a^3}-\dfrac{t^3}{2^4a^5} & & \dfrac{5t^4}{2^4a^6}+\dfrac{t^5}{2^6a^8}+\dfrac{t^6}{2^8a^{10}} \\
 & & & -\dfrac{t^3}{2^4a^5} & \\
\hline
-\dfrac{5t^4}{2^7a^7} & 1 & 2a-\dfrac{t}{a}-\dfrac{t^2}{2^2a^3}-\dfrac{t^3}{2^3a^5} & & \dfrac{5t^4}{2^6a^6}+\dfrac{t^5}{2^6a^8}+\dfrac{t^6}{2^8a^{10}} \\
 & & & -\dfrac{5t^4}{2^7a^7} & -\dfrac{5t^4}{2^6a^6}+\dfrac{5t^5}{2^7a^8}+\dfrac{5t^6}{2^9a^{10}}+\dfrac{5t^7}{2^{10}a^{12}}+\dfrac{25t^8}{2^{14}a^{14}} \\
\hline
 & 1 & 2a-\dfrac{t}{a}-\dfrac{t^2}{2^2a^3}-\dfrac{t^3}{2^3a^5}-\dfrac{5t^4}{2^7a^7} & & \dfrac{7t^5}{2^7a^8}+\dfrac{7t^6}{2^9a^{10}}+\dfrac{5t^7}{2^{10}a^{12}}+\dfrac{25t^8}{2^{14}a^{14}} \\
 & & & -\dfrac{5t^4}{2^7a^7} & \\
\hline
-\dfrac{7t^5}{2^8a^9} & 1 & 2a-\dfrac{t}{a}-\dfrac{t^2}{2^2a^3}-\dfrac{t^3}{2^3a^5}-\dfrac{5t^4}{2^6a^7} & & \dfrac{7t^5}{2^7a^8}+\dfrac{7t^6}{2^9a^{10}}+\dfrac{5t^7}{2^{10}a^{12}}+\dfrac{25t^8}{2^{14}a^{14}}
\end{array}
$$

図 2: 組み立て除法による変数変換 (その 2)

として，右辺第 n 項 a_n を，第 $n-1$ 項 a_{n-1} で割ることによって，

$$
a_1 = a, \qquad a_2 = \frac{t}{2a} = \frac{1}{2}a_1 r, \qquad a_3 = \frac{t^2}{2^3a^3} = \frac{1}{4}a_2 r,
$$

$$
a_4 = \frac{t^3}{2^4a^5} = \frac{3}{6}a_3 r, \quad a_5 = \frac{5t^4}{2^7a^7} = \frac{5}{8}a_4 r, \quad a_6 = \frac{7t^5}{2^8a^9} = \frac{7}{10}a_5 r
$$

とする．したがって，

$$
\sqrt{n} = a_1 - \frac{1}{2}a_1 r - \frac{1}{4}a_2 r - \frac{3}{6}a_3 r - \frac{5}{8}a_4 r - \frac{7}{10}a_5 r - \cdots
$$

となる．一般項は，帰納的に

$$
a_{i+1} = -\frac{(2i-3)r}{2i}a_i = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2i-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot \cdots \cdot (2i)}a_1 r^i, \quad (i \geq 2)
$$

である．

このような組み立て除法による変数変換は，建部賢弘の『円理弧背術』の冒頭において詳細に述べられているところであり，第一の展開式がこのようにして得られたと考えるの

は自然なことである．このことを背景として『明治前日本数学史』は,「この公式を出す経路の説明はないが，それは建部賢弘の円理弧背術にすでに示されている」と述べている．しかし，この一文は微妙なニュアンスを含んだもので，注意が必要である．まず,『円理弧背術』においては一般二項定理は述べられていない．そして，二項級数展開はこの『円理弧背術』(1722 年以降) から『算法綴術草』(1740 年頃) に至る期間に得られたと考えられる[5]．仮に松永が建部の得た結果をまとめたものならば，すなわち建部が一般二項定理を知っていたとするならば，その方法は上に述べたようなもので，それは『円理弧背術』の冒頭に述べられているから,「経路の説明はないが，円理弧背術に述べられている」ということになる．しかし実際には，建部が一般二項定理を知っていたという証拠はない．計算の方法を知っていることと，それを用いて求められる一般二項定理を知っていたこととは明らかに別のことであり，互いに無関係なことである．上の引用文中,「経路」あるいは「経路の説明」が一般二項定理の証明の主要な計算部分である組み立て除法による変数変換部分を指すとしても，はやり建部を信じる心が勝った記述といえよう．

第二の計算は，$\sqrt{n}$ を概算して a とし，$n=a^2+b$ とする．まず商として $a_0=a$ を立てて，図 3 左のように変数を変換する．さらに商 $\Delta_1=\dfrac{b}{2a_0}$ を立てて，図 3 右のように

$$
\begin{array}{c|ccc}
a_0 & 1 & 0 & -(a^2+b) \\
 & & a_0 & {a_0}^2 \\
\hline
 & 1 & a_0 & -b \\
 & & a_0 & \\
\hline
 & 1 & 2a_0 & -b
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\dfrac{b}{2a_0} & 1 & 2a_0 & -b \\
 & & \dfrac{b}{2a_0} & -b+\dfrac{b^2}{4{a_0}^2} \\
\hline
 & 1 & 2a_0+\dfrac{b}{2a_0} & \dfrac{b^2}{4{a_0}^2} \\
 & & \dfrac{b}{2a_0} & \\
\hline
 & 1 & 2a_0+\dfrac{b}{a_0} & \dfrac{b^2}{4{a_0}^2}
\end{array}
$$

図 3: 組み立て除法による変数変換 (その 1)

変数を変換する．ここで，$2a+\dfrac{b}{a_0}=\dfrac{2{a_0}^2+b}{a_0}$ の分子を a_1 として，

$$
-\frac{b^2}{4{a_0}^2}\div\frac{a_1}{a_0}=-\frac{b^2}{4{a_0}^2}\frac{a_0}{a_1}=-\frac{b^2}{4a_0a_1}
$$

を商として，図 4 のように変数を変換する．($\Delta_2=\dfrac{b^2}{4a_0a_1}$ とおくと，$\Delta_2=\dfrac{\Delta_1 b}{2a_1}$ である．)

ここで，$\dfrac{a_1}{a_0}-\dfrac{b^2}{2a_0a_1}=\dfrac{2{a_1}^2-b^2}{2a_0a_1}$ の分子を a_2 とおいて，

$$
-\frac{b^4}{16{a_0}^2{a_1}^2}\div\frac{a_2}{2a_0a_1}=-\frac{b^4}{16{a_0}^2{a_1}^2}\frac{2a_0a_1}{a_2}=-\frac{b^4}{8a_0a_1a_2}
$$

---

[5]『円理弧背術』の著作年代についても,『算法綴術草』の著作年代についても，推定にすぎない．前者については,『綴術算経』(1722 年) との内容的考察によるものである．一方後者は林 ([5]) による推定である．

$$
\begin{array}{r|cccc}
-\dfrac{b^2}{4a_0a_1} & 1 & \dfrac{a_1}{a_0} & & \dfrac{b^2}{4{a_0}^2} \\
 & & & -\dfrac{b^2}{4a_0a_1} & -\dfrac{b^2}{4{a_0}^2}+\left(\dfrac{b^2}{4a_0a_1}\right)^2 \\
\hline
 & 1 & \dfrac{a_1}{a_0} & -\dfrac{b^2}{4a_0a_1} & \dfrac{b^4}{16{a_0}^2{a_1}^2} \\
 & & & -\dfrac{b^2}{4a_0a_1} & \\
\hline
 & 1 & \dfrac{a_1}{a_0} & -\dfrac{b^2}{2a_0a_1} & \dfrac{b^4}{16{a_0}^2{a_1}^2}
\end{array}
$$

図 4: 組み立て除法による変数変換 (その 2)

を商とする．($\Delta_3 = \dfrac{b^4}{8a_0a_1a_2}$ とおくと，$\Delta_3 = \dfrac{\Delta_2 b^2}{2a_2}$ である．) 以下同様に計算すると，

$$\Delta_4 = \frac{\Delta_3 b^4}{2a_3},\ \Delta_5 = \frac{\Delta_4 b^8}{2a_4},\ \cdots$$

が商として順に得られる．こうして第二の展開式が得られる．

このように，第二の展開式は，第一の展開式と本質的に同じ方法にもとづくものである．

4 『算法綴術草』における一般二項定理の意義

組み立て除法を繰り返して変数を変換する方法は，計算が煩雑で，一般化しにくいため,『算法綴術草』などにおけるように，$(a^2+b)^{1/2}$，$(a^2-b)^{1/2}$，$(a^2+b^2)^{1/2}$，$(a^2+b^2)^{1/2}$ $(a, b > 0)$ の展開を別々に処理することになった．また二種類の展開法が発見されるなど，組み立て除法による級数展開法は「ノウハウ」として当時多用された．たとえば『円理弧背綴術』冒頭には,「後学の為」と称してその計算が 21 丁に渡って述べられており,「皈除求商術」と呼ばれている．建部はまた『綴術算経』(1722 年) の極値計算においても組み立て除法を用いて，(経験的に) 導関数を導いている ([1])．方程式の解法としては関孝和 (?-1708) がすでに『開法翻変之法』において用いている．

『算法綴術草』においては，これらの無限級数展開法は除法 (帰除) や開平の直接的な方法にかわり，近似値を計算する方法と位置づけられている．すでに建部賢弘は『円理弧背術』において，級数の項別処理を行なっており，級数展開の有効性を認識していたが[6],『算法綴術草』においては，そのような意味での有効性は認識されていなかった．

その有効性を前面に押し出したのが，安島直円 (1732–1798) による円理二次綴術である ([2])．安島は『弧背術解』において弦の等分によって円弧長を計算した．そこでは，一般二項定理と冪和の極限計算が本質的な計算として機能した．

このように，松永の『算法綴術草』における級数展開は，近似計算のためのアルゴリズムと位置づけられ，級数の意義の理解という点では，建部の『円理弧背綴術』に比べて劣っているが，そこで得られた一般二項定理は後に本質的な役割を果たすこととなった．この

[6]近世日本数学史における無限級数の意義については [3] も参照されたい．

一般二項定理を建部に帰する通説もあるが，新資料が発掘されない限りは，松永によるものとしておくべきである．初期の無限級数は近似計算アルゴリズムとして位置づけることが可能であり，松永がそのような観点から帰除と開平の近似計算のために無限級数展開をし，一般二項定理を得たと考えても不思議はない．

文献

[1] 小川束「建部賢弘の極値計算について」『京都大学数理解析研究所講究録』1064，1998年，pp. 129–147.

[2] 小川束「近世日本数学における解析的算法 (円理) の歴史」日本数学会総合講演・企画特別講演アブストラクト，1999年，pp. 38–47.

[3] 小川束「近世日本数学史に現われた無限級数の特質について」『京都大学数理解析研究所講究録』1130，2000年，pp. 212–219.

[4] 日本学士院日本科学史刊行会編『明治前日本数学史新訂版』第二巻，井上書店・臨川書店，1979 年.

[5] 林鶴一「開方綴術及ビ開方算顆術ニ就テ」東北数学雑誌 35，1932 年.（『林鶴一和算研究集録』上 pp.285–339 に再録.）

[6] 平山諦，内藤淳編集『松永良弼』松永良弼刊行会，1987 年.